Warnhinweis

Bei diesen „Lösungen“ handelt es sich um Lösungsskizzen, Ansätze und Endergebnisse. Die „Lösungen“ können nicht als Muster für Klausur-Lösungen angesehen werden. Außerdem wurden die „Lösungen“ nicht noch einmal auf ihre Richtigkeit kontrolliert und können Fehler enthalten.

Diese „Lösungen“ dienen lediglich zum Abgleich eurer Ergebnisse. Wenn ihr unsicher seid, fragt lieber noch einmal nach.

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1:

a) $(x_1, x_2, x_3) * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 0, 1)$

b) Es ist $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit wir weitere Aussagen treffen können, bringen wir A^* in Stufenform.

Es ist $A^* * A_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und diese Matrix multipliziert mit $A_{13}(-4)$, ergibt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Jetzt multiplizieren wir mit $A_{23}(-6)$ und erhalten:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$. Wir können nun ablesen, dass der

Rang von A voll ist, also ist das LGS eindtg. lösb. und die Lösungsmenge endlich.

c) $6x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$
$4x_1 \qquad + x_3 = 1$
$8x_1 + 8x_2 + x_3 = 1$

d) Es ist $(1, -\frac{1}{2}, -3)$ eine Lösung des LGS.
Weiter ist $B^* * A_{12}(-\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 4 & -8/3 & 8 \\ 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Das mit $A_{13}(-\frac{4}{3})$ mult.
bzgl. des HLGS

ist $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & -8/3 & 8/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und das multipl. mit $A_{23}(1)$, ergibt

$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & -8/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir sehen, dass $Rang(B) = Rang(B^*) = 2$ gilt,

das HLGS also unendlich viele Lsg hat: $-\frac{8}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$, ergibt $x_3 = 8x_2$. Das eingesetzt in $6x_1 + 4x_2 + 8x_2 = 0$, ergibt: $x_1 = -2x_2$, also ist die Lsgmenge des HLGS $\{(-2a, a, 8a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Mit der VL folgt nun, dass die Lsgmenge des LGS aus (c) $\{(-2a+1, a-\frac{1}{2}, 8a-3) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist.

Aufgabe 2:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (da voller Rang)

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=:C}$ (da Rang dieser Matrix C gleich 2 ist, aber Rang(C^*) = 3)

↳ denn: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} * A_{23}(-4) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} * A_{23}(-\frac{4}{a}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{a}+b \\ 1 & 2 & -\frac{8}{a}+1 \end{pmatrix}$

Es ist $-\frac{8}{a}+1=0$ g.d.w. $a=8$ gilt und $-\frac{4}{8}+b=0$ genau dann, wenn $b=\frac{1}{2}$ gilt. Also ist $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ eine Lösung für c)

↑ Vorgehensweise: $Rg\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ muss gleich 2 sein für unendl. viele Lsgen und es muss $Rang\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gelten.

Aufgabe 3:

Es ist $A^* * A_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \\ a & -2a+6 & 0 \end{pmatrix}$, das multipliziert mit $A_{23}(-2)$, ergibt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ a & -2a+6 & 4a-12 \end{pmatrix}$. Damit das LGS lösbar ist, muss Rang(A) = 2 = Rang(A^*) gelten, also $4a-12=0$. Das gilt genau dann, wenn $a=3$ ist. Das LGS ist also für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 3$ nicht lösbar. Ist $a=3$, so müssen wir berechnen:

$$x * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = (3,0,0).$$

Es gilt: $5x_2 + 5x_3 = 0$, also $x_3 = -x_2$ und

$x_1 + 3x_2 = 3$, also $x_1 = 3 - 3x_2$. Daraus ergibt sich die Lösungsmenge $\{(3-3b, b, -b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ für das LGS.

Aufgabe 4:

Es ist $A^* * A_{12}(1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & a-1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$. $\tilde{A} * A_{13}(-2) =$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a-1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_2}$. $\tilde{A}_2 * A_{23}\left(-\frac{5}{a-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a-1 & 0 \\ 2 & 3 & -\frac{15}{a-1} - 5 \\ 1 & 3 & -\frac{15}{a-1} - 1 \end{pmatrix}$.

Wir sehen, dass $a \neq 1$ gelten muss und es darf nicht gelten: $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A^*)$. $\text{Rang}(A) \neq 3$ gilt genau dann, wenn $-\frac{15}{a-1} - 5 = 0$ gilt, also genau dann, wenn $a = -2$ gilt. In dem Fall wird der Term $-\frac{15}{a-1} - 1$ nicht 0, denn $-\frac{15}{-3} - 1 = 4$, dh. es würde $\text{Rang}(A) = 2$ gelten, aber $\text{Rang}(A^*) = 3$. Also ist das LGS f.a. $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ und $a \neq -2$ lösbar.

Sei nun $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ und $a \neq -2$. Dann gilt:

$$\left(\frac{-15}{a-1} - 5\right) x_3 = \frac{-15}{a-1} - 1 \text{, also } x_3 = \frac{-15-(a-1)}{-15-5(a-1)}.$$

Das ergibt in $(a-1)x_2 + 3x_3 = 3$: $x_2 = \frac{3 - 3x_3}{a-1}$

$= \frac{3 - 3\left(\frac{-15-(a-1)}{-15-5(a-1)}\right)}{a-1}$. Für x_1 erhalten wir aus

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$: $x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 = 1 + \frac{3 - 3\left(\frac{-15-(a-1)}{-15-5(a-1)}\right)}{a-1}$

$- 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{-15-(a-1)}{-15-5(a-1)}\right)}_{=:f}$.

Es ergibt sich die einelem. Lsgmenge $\left\{\left(1 + \frac{3-3f}{a-1} - 2f, \frac{3-3f}{a-1}, f\right)\right\}$

Aufgabe 5:

Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Wir bringen A^* in Stufenform:

Es ist $A^* A_{12}(-2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & -10 & 3 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}}_{=:\hat{A}}$, $\hat{A} * A_{13}(-2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 \\ 6 & -10 & -9 \\ 4 & -6 & -16 \end{pmatrix}}_{=:\hat{A}_2}$.

$\hat{A}_2 * A_{23}\left(\frac{-5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 6 & -10 & 16 \\ 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, also:

$16x_3 = -1$, damit $x_3 = -\frac{1}{16}$, das eingesetzt in

$-2x_2 - 10x_3 = -6$, ergibt: $x_2 = \frac{53}{16}$ und das ergibt in

$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 4$: $x_1 = -\frac{89}{16}$. Also ist die Lsgmenge

$\left\{\left(-\frac{89}{16}, \frac{53}{16}, -\frac{1}{16}\right)\right\}$.

Aufgabe 6.

a) Lösungsmenge $= \emptyset$, also unlösbar, denn:
Rang $(A) = 2$, Rang $(A^*) = 3$.
b) Lösungsmenge ist unendlich groß, da Rang $(A) = 2 \neq 3$ (nicht voll) und Rang $(A^*) = 2$.
c) Nein, denn das LGS $x * B = d$ ist eindtg. lösb. genau dann, wenn B vollen Rang hat, aber B hat Rang 2, also kann es ein solches d nicht geben.

Aufgabe 7:

a) Ja, wegen Satz 6.2
b) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) - \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$

Aufgabe 5:

$v_1 := \left(\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1\cdot 4 - 3\cdot 2)} \cdot (1\cdot 4 - 4\cdot 2) = \frac{1}{-2} \cdot (-4) = 2$

$v_2 := \left(\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (4-3) = -\frac{1}{2}$.

Also ist $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ eine Lösung für das LGS.

Probe:

$\left(2, -\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (1, 4)$ ☺

Abbildungsmatrizen

1. Aufgabe:

Gegeben seien die geordneten Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$:

$$\hat{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \hat{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \hat{D} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{C})$ für die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch:

$$\text{Für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ sei } (x, y, z)^\alpha := (4x + y - 2z, -y + z).$$

b) Bestimme die Basiswechselmatrix von $\hat{C}$ nach $\hat{D}$.

c) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{D})$ möglichst effizient.

Lösung:

a) Die Basisvektoren von $\hat{B}$ werden mit α abgebildet, danach wird die Lösung als Linearkombination der Vektoren aus $\hat{C}$ dargestellt, die Koeffizienten bei dieser Darstellung entsprechen dann den Einträgen der Abbildungsmatrizen.

$$\begin{aligned} (1, 0, 1)^\alpha &= (2, 1) = a_{11} \cdot (1, 1) + a_{12} \cdot (1, -1) \\ &\Rightarrow a_{11} = 1.5 \text{ und } a_{12} = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0, -1, 0)^\alpha &= (-1, 1) = a_{21} \cdot (1, 1) + a_{22} \cdot (1, -1) \\ &\Rightarrow a_{21} = 0 \text{ und } a_{22} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2, 1, 0)^\alpha &= (9, -1) = a_{31} \cdot (1, 1) + a_{32} \cdot (1, -1) \\ &\Rightarrow a_{31} = 4 \text{ und } a_{32} = 5. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Die Basiswechselmatrix von $\hat{C}$ nach $\hat{D}$ entspricht $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \hat{C}, \hat{D})$. Dazu müssen wir die Vektoren von $\hat{C}$ als Linearkombination der Vektoren aus $\hat{D}$ darstellen.

$$(1, 1) = a_{11} \cdot (1, -2) + a_{12} \cdot (0, 1) \Rightarrow a_{11} = 1 \text{ und } a_{12} = 3$$

$$(1, -1) = a_{11} \cdot (1, -2) + a_{12} \cdot (0, 1) \Rightarrow a_{11} = 1 \text{ und } a_{12} = 1.$$

Also ist

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \hat{C}, \hat{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Mit Satz 5.7 der Vorlesung erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{D}) &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, \hat{B}, \hat{B}) * \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{C}) * \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \hat{C}, \hat{D}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Aufgabe:

Sei $\hat{B} := (b_1, b_2, b_3)$ eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, gegeben durch

$$\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

a) Was ist $(2b_1 + b_3)^\alpha$?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist α injektiv? Für welche ist α surjektiv?

c) Bestimme $\dim_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{Kern}(\alpha))$ und $\dim_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{Bild}(\alpha))$ für $a \neq 0$.

d) Gib ein konkretes Beispiel für einen 1-dimensionalen α-invarianten $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

a) Wir berechnen zunächst die Bilder der Basisvektoren, dazu benutzen wir die Matrixeinträge, sie liefern die Koeffizienten für die Linearkombination der Bilder mithilfe der Basiselemente:

$$\begin{aligned} b_1^\alpha &= 1 \cdot b_1 \\ b_3^\alpha &= -2 \cdot b_1 - a \cdot b_2. \end{aligned}$$

Den zweiten Basisvektor benötigen wir nicht in der Darstellung unseres Vektors.
Nun ist

$$\begin{aligned} (2b_1 + b_3)^\alpha &= 2 \cdot b_1^\alpha + 1 \cdot b_3^\alpha \\ &= 2 \cdot b_1 - 2 \cdot b_1 - a \cdot b_2 = -a \cdot b_2. \end{aligned}$$

b) Da α ein Endomorphismus ist, ist α injektiv genau dann, wenn α surjektiv ist. Die Abbildung α ist genau dann bijektiv, wenn ihre Abbildungsmatrix invertierbar ist. Es ist $\det(\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})) = a$ (z.B. mit der Regel von Sarrus). Also ist die Determinate Null genau dann, wenn $a = 0$ ist. Damit ist die Matrix invertierbar für alle $a \neq 0$.

c) Wir haben in b) gesehen, dass α bijektiv ist, wenn $a \neq 0$ ist. Damit ist α insbesondere surjektiv und $\dim_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{Bild}(\alpha)) = 3$. Mit dem Dimensionssatz folgt, dass $\dim_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{Kern}(\alpha)) = 0$ ist.

d) Da in der 1. Zeile der Abbildungsmatrix der 1. Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^3$ steht, wird der Raum, der von dem ersten Basisvektors unserer Basis $\hat{B}$, also $\langle b_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ wieder auf sich selbst abgebildet. Das haben wir auch in a) nachgerechnet.

3. Aufgabe:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\hat{B}$ eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Gib jeweils ein Gegenbeispiel an, das die Aussage widerlegt, oder Sätze aus der Vorlesung an, die die Aussage bestätigen.

- ☐ α ist genau dann bijektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ invertierbar ist.
- ☐ α ist genau dann injektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ vollen Rang hat.
- ☐ Falls $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ invertierbar ist, gilt $\dim_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{Kern}(\alpha))=\dim_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{Bild}(\alpha))$.

Lösung:

- ☒ α ist genau dann bijektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ invertierbar ist.
  Folgt mit: Lemma 5.11
- ☒ α ist genau dann injektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ Vollrang hat.
  Folgt mit: Lemma 5.11 und 5.15
- ☐ Falls $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ invertierbar ist, gilt $\dim_{\mathbb{R}^4}(\mathrm{Kern}(\alpha))=\dim_{\mathbb{R}^4}(\mathrm{Bild}(\alpha))$.
  Folgt mit: Aufgabe 3

4. Aufgabe:

Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 10 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Gibt es ein $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ und eine geordnete Basis $\hat{B}$ des $\mathbb{R}^3$ so, dass $A = \mathcal{M}(\varphi, \hat{B}, \hat{B})$ ist?
Falls so ein φ existiert, dann wähle eine Basis $\hat{B}$ und gib eine Funktionsvorschrift für φ an.

Lösung:
Zu jeder Matrix gibt es eine zugehörige lineare Abbildung. Die Dimensionen passen hier auch. Die Frage ist nur, ob diese bijektiv ist.
Das benötigte Argument hatten wir jetzt schon öfter, aber es ist wahnsinnig wichtig: Die Abbildung ist bijektiv genau dann, wenn ihre Abbildungsmatrix invertierbar ist. Dafür kann man z.B. schauen, ob die Matrix Vollrang hat oder man rechnet die Determinante aus. Wir berechnen die Determinante:

$$\det(A) = 49 + 0 + 0 + 112 - 0 - 140 = 21 \neq 0$$

und damit ist A invertierbar und φ bijektiv.
Wenn ihr eine Basis wählen dürft, dann wählt die Standardbasis, das macht in der Regel einiges einfacher.
Wenn wir hier die geordnete Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ wählen, also $\hat{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, dann erhalten wir das Bild eines beliebigen Vektors $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ unter φ, indem wir ihn mit der zugehörigen Abbildungsmatrix multiplizieren. Somit erhalten wir

$$(x, y, z)^{\varphi} := (x, y, z) * A = (x, y, z) * \begin{pmatrix} -1 & 10 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = (-x + 2y + 4z, 10x - 7y, 4x + 7z)$$

Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit

1. Aufgabe: (*Eigenwerte*)

Seien immer K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Folgende Informationen sind gegeben. Berechne jeweils $\mathrm{Spek}(\varphi)$.

a) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ und für alle $(a, b, c) \in V$ ist $(a, b, c)^\varphi := (c, b, a)$.
Sei $\hat{B}$ die geordnete Standardbasis von V, dann ist

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\begin{aligned} P_\varphi &= Det\left(x \cdot I_3 - M(\varphi, \hat{B}, \hat{B})\right) \\ &= Det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix}\right) \\ &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

und wir sehen, dass die Nullstellen von P_φ in $\mathbb{R}$ genau 1 und -1 sind. Es ist also $\mathrm{Spek}(\varphi) = \{-1, 1\}$.

b) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^5$ und φ ist gegeben durch $(1, 0, 0)^\varphi = (3, 1, 0)$, $(0, 1, 0)^\varphi = (0, 4, 0)$ und $(0, 0, 1)^\varphi = (4, 0, 0)$.
Sei $\hat{B}$ die geordnete Standardbasis von V, dann ist

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\begin{aligned} P_\varphi &= Det\left(x \cdot I_3 - M(\varphi, \hat{B}, \hat{B})\right) \\ &= Det\left(\begin{pmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 \\ -4 & 0 & x \end{pmatrix}\right) \\ &= (x-3)(x-4)x \end{aligned}$$

und wir sehen $\mathrm{Spek}(\varphi) = \{0, 3, 4\}$.

c) $K=\mathbb{R}, \dim_K(V)=3$, $\hat{B}$ ist eine geordnete Basis von V und φ ist gegeben durch

$$M(\varphi,\hat{B},\hat{B})=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&-3\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}P_\varphi &= Det\left(x\cdot I_3 - M(\varphi,\hat{B},\hat{B})\right)\\ &= Det\left(\begin{pmatrix}x&0&-1\\-2&x&3\\1&0&x\end{pmatrix}\right)\\ &= x^3+x\\ &= x(x^2+1)\end{aligned}$$

und P_φ hat in $\mathbb{R}$ nur die Nulstelle 0, also ist $\operatorname{Spek}(\varphi)=\{0\}$.

d) Welche Eigenwerte hat φ aus c), wenn $K=\mathbb{C}$ ist?
In $\mathbb{C}$ ist

$$P_\varphi \overset{c)}{=} x(x^2+1)=x(x+i)(x-i)$$

und damit ist $\operatorname{Spek}(\varphi)=\{-i,0,i\}$.

2. Aufgabe: (*Eigenräume, Diagonalisierbarkeit*)

Sei $\hat{B}:=(b_1,b_2,b_3)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$ und sei $\varphi\in\operatorname{Eig}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\varphi,\hat{B},\hat{B})=\begin{pmatrix}9&0&-6\\18&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

a) Berechne alle Eigenräume von φ. Ist φ diagonalisierbar? Ist φ bijektiv?
Es ist

$$P_\varphi(x)=\operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix}x-9&0&6\\-18&x-6&0\\0&0&x-6\end{pmatrix}\right)=(x-6)^2(x-9)$$

und wir sehen, dass $\operatorname{Spek}(\varphi)=\{6,9\}$ ist (Nullstellen von $P_\varphi(x)$.) Außerdem sehen wir $Viel_6(P)=2$ und $Viel_9(P)=1$.
Wir berechnen nun $Eig_{\mathbb{R}}(\varphi,6)=Kern(\varphi-6\cdot id_{\mathbb{R}^3})$. Mit der ICE-Verbindung ist

$$M(\varphi-6\cdot id_{\mathbb{R}^3},\hat{B},\hat{B})=M(\varphi,\hat{B},\hat{B})-6\cdot I_3=\begin{pmatrix}3&0&-6\\18&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Seien für alle $v\in\mathbb{R}^3$ nun $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ so, dass

$$v=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3$$

ist und sei $\pi:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ die Koordinatenabbildung bzgl. φ und $\hat{B}$. Dann ist für alle $v\in\mathbb{R}^3$ also $v^\pi=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Wir bestimmen nun die Lösungsmenge des HLGS

$$((\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=)\ v^\pi\cdot\begin{pmatrix}3&0&-6\\18&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}(=(0_{\mathbb{R}^3})^\pi).$$

Aus der letzten Spalte erhalten wir

$$-6 \cdot \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$$

und damit aus der ersten Spalte auch §$\lambda_2 = 0$. Da λ_3 immer mit 0 multipliziert wird ist λ_3 beliebig. Wir erhalten also als Lösungsmenge $\langle(0,0,1)\rangle_{\mathbb{R}}$. Für alle $v \in Eig_{\mathbb{R}}(\varphi, 6)$ ist nun $v^{\pi} \in \langle(0,0,1)\rangle_{\mathbb{R}}$, also existiert für alle $v \in Eig_{\mathbb{R}}(\varphi, 6)$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$v = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \lambda b_3$$

ist und damit ist $Eig_{\mathbb{R}}(\varphi, 6) = \langle b_3 \rangle_{\mathbb{R}}$. Analog erhalten wir $Eig_{\mathbb{R}}(\varphi, 9) = \langle b_1 - \frac{1}{2} b_3 \rangle_{\mathbb{R}}$.
Wir sehen nun, dass $\dim_{\mathbb{R}}(Eig_{\mathbb{R}}(\varphi, 6) = 1 \neq 2 = Viel_6(P)$ ist und damit ist φ nicht diagonalisierbar.
Nun zur Bijektivität: Es ist

$$\operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right) = 9 \cdot 6 \cdot 6 \neq 0$$

und mit Lemma 9.10 ist damit $Kern(\varphi) = \{0\}$, also φ bijektiv. Mit der Dimensionsformel ist nun

$$\dim_{\mathbb{R}}(Bild(\varphi)) = 3 - \dim_{\mathbb{R}}(Kern(\varphi)) = 3 - 0 = 3$$

und damit ist φ surjektiv, also bijektiv.

b) Sei nun $\alpha \in \operatorname{Eig}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\alpha, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Standardbasis. Zeige, dass α diagonalisierbar ist, bestimme alle Eigenräume und finde eine geordnete Basis $\hat{D}$ so, dass $M(\alpha, \hat{D}, \hat{D})$ eine Diagonalmatrix ist. Ist α bijektiv?
Es ist

$$P_{\alpha}(x) = \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} x-9 & 0 & 6 \\ -18 & x-6 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right) = (x-9)(x-6)x$$

und wir sehen, dass $\operatorname{Spek}(\alpha) = \{0, 6, 9\}$ ist. Es ist nun $|\operatorname{Spek}(\alpha)| = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ und mit Korollar 9.15 ist α diagonalisierbar.
Wir bestimmen nun den Eigenraum zum Eigenwert 0 als $Kern(\alpha - 0 \cdot id_{\mathbb{R}^3})$. Es ist

$$M(\alpha - 0 \cdot id_{\mathbb{R}^3}, \hat{C}, \hat{C}) = M(\alpha, \hat{C}, \hat{C}) - 0 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um den Kern zu bestimmen lösen wir das HLGS

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

In der letzten Spalte sehen wir

$$-6x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

und analog in der zweiten (oder ersten) Spalte $x_2 = 0$. Da x_3 immer mit 0 multipliziert wird ist x_3 beliebig. Es ist also $Eig_{\mathbb{R}^3}(\alpha, 0) = Kern(\alpha - 0 \cdot id_{\mathbb{R}^3}) = \langle(0,0,1)\rangle_{\mathbb{R}}$. Mit analogem Vorgehen erhalten

wir $Eig_{\mathbb{R}^3}(\alpha, 6) = \langle(1, -6, 1)\rangle_{\mathbb{R}}$ und $Eig_{\mathbb{R}^3}(\alpha, 9) = \langle(1, 0, -\frac{3}{2})\rangle_{\mathbb{R}}$.
Da α diagonalisierbar ist folgt mit Satz 9.14 nun

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spek}(\alpha)} Eig_{\mathbb{R}^3}(\alpha, \lambda)\\ &= \langle(0,0,1)\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle(1,-6,1)\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle(1,0,-\frac{3}{2})\rangle_{\mathbb{R}}\\ &= \langle\{(0,0,1),(1,-6,1),(1,0,-\frac{3}{2})\}\rangle_{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Sei nun $D := \{(0,0,1),(1,-6,1),(1,0,-\frac{3}{2})\}$ und $\hat{D} := \big((0,0,1),(1,-6,1),(1,0,-\frac{3}{2})\big)$. Da $\langle D\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ ist und $|D| = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, ist D eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\hat{D}$ eine geordnete Basis. Da alle Vektoren in $\hat{D}$ Eigenvektoren sind erhalten wir

$$M(\alpha, \hat{D}, \hat{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Da $0 \in \mathrm{Spek}(\alpha)$ ist, ist mit Lemma 9.10 $Kern(\alpha) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, α also nicht injektiv und nicht bijektiv.

3. Aufgabe: (*Diagonalisierbarkeit*)

Es sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Folgende Informationen sind gegeben. Entscheide in jedem Fall, ob φ diagonalisierbar ist oder nicht oder ob man keine Aussage treffen kann.

a) $P_\varphi = (x-1)(x-2)(x-10)$
diagonalisierbar

b) $P_\varphi = (x-1)^2 \cdot x$.
keine Aussage möglich

c) $P_\varphi = (x-1)^2 \cdot x$ und $\dim_{\mathbb{R}}(Eig(\varphi, 1)) = 2$.
diagonalisierbar

d) $P_\varphi = (x^2+1) \cdot (x-5)$.
nicht diagonalisierbar

e) $\mathrm{Spek}(\varphi) = \{-1, 0\}$ und $\dim_{\mathbb{R}}(Eig(\varphi, -1)) = \dim_{\mathbb{R}}(Eig(\varphi, 0)) = 1$.
nicht diagonalisierbar

4. Aufgabe: (*Spektralzerlegung*)

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Standardbasis.

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume vom φ. Ist φ diagonalisierbar?
Es ist

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} x & 9 \\ 1 & x \end{pmatrix}\right) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

und damit ist $\mathrm{Spek}(\varphi) = \{-3, 3\}$. Die Eigenräume werden für beide $\lambda \in \mathrm{Spek}(\varphi) = \{-3, 3\}$ als $Kern(\varphi - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2})$ bestimmt. Wir erhalten $Eig_{\mathbb{R}^2}(\varphi, 3) = \langle(3, 1)\rangle_{\mathbb{R}}$ und $Eig_{\mathbb{R}^2}(\varphi, -3) = \langle(-3, 1)\rangle_{\mathbb{R}}$. Wir betrachten die Vielfachheiten und sehen, dass φ diagonalisierbar ist.

b) Es seien U_1 und U_2 die Eigenräume bezüglich φ. Gib eine Abbildungsvorschrift für die Projektionen π_1 auf U_1 und π_2 auf U_2 an.

Wir sehen, dass $\{(3,1)\}$ eine Basis von $Eig_{\mathbb{R}^2}(\varphi, 3)$ ist und $\{(-3,1)\}$ eine Basis von $Eig_{\mathbb{R}^2}(\varphi, -3)$ ist. Aus Satz 9.14 können wir nun ähnlich wie in Aufgabe 2c) schlussfolgern, dass $\{(3,1), (-3,1)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von φ ist. Sei nun $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann existieren λ_1, λ_2 so, dass

$$v = (x,y) = \lambda_1(3,1) + \lambda_2(-3,1) = (3(\lambda_1 - \lambda_2), \lambda_1 + \lambda_2)$$

ist. Durch Komponentenvergleich erhalten wir $\lambda_1 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}x$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}x$. Wir prüfen nach:

$$\begin{aligned}(3(\lambda_1 - \lambda_2), \lambda_1 + \lambda_2) &= (3(\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}x - (\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}x)), \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}x) \\ &= (x,y).\end{aligned}$$

Wir können also jeden Vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ darstellen durch

$$(x,y) = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}x\right) \cdot (3,1) + \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}x\right) \cdot (-3,1).$$

Sei nun $U_1 := Eig_{\mathbb{R}^2}(\varphi, 3)$ und sei $U_2 := Eig_{\mathbb{R}^2}(\varphi, -3)$. Dann ist $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto U_1$ definiert wie folgt: f.a. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $(x,y)^{\pi_1} := \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}x\right) \cdot (3,1)$ die Projektion auf U_1 und $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto U_2$ definiert wie folgt: f.a. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $(x,y)^{\pi_2} := \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}x\right) \cdot (-3,1)$ die Projektion auf U_2.

Zusammenhänge und Beweise

1. Aufgabe:

Beweise folgende Aussagen kurz!

a) Seien K ein Körper, V ein $K-$Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von α. Dann ist λ^2 ein Eigenwert von α^2.

b) Seien K ein Körper, n eine natürliche Zahl und V und W seien n-dimensionale $K-$Vektorräume. Weiter sei $\hat{B}$ eine geordnete K-Basis von V und $\hat{C}$ eine geordnete K-Basis von W. Wie in Satz 5.5. ordne Φ^{-1} jeder Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ eine K-lineare Abbildung aus $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ zu. Zeige, dass $\dim_K(\mathrm{Kern}(A^{\Phi^{-1}})) = \dim_K(\mathrm{Kern}((A^t)^{\Phi^{-1}})$ gilt.

Anders ausgdrückt: Der Kern der zu A gehörenden linearen Abbildung hat die gleiche Dimension wie der Kern der zu A^t gehörenden linearen Abbildung.

c) Sei A eine $n \times m-$Matrix mit Einträgen aus dem Körper K. Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem $x * A = 0_{K^m}$. Ist y eine Lösung des HLGS, so ist auch $y + y$ eine Lösung.

Lösung:

a) Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von α. Dann existiert per Definition ein $v \in V \setminus \{0_V\}$ so, dass gilt:

$$v^{\alpha} = \lambda \cdot v$$

Bildet man nochmal mit α ab, so erhält man:

$$v^{\alpha^2} = (v^{\alpha})^{\alpha} = (\lambda \cdot v)^{\alpha} = \lambda \cdot (v^{\alpha}) = \lambda \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^2 \cdot v$$

Somit ist λ^2 ein Eigenwert von α^2.

b) Nach Dimensionssatz gilt:

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(A^{\Phi^{-1}})) = \dim_K(V) - \dim_K(\mathrm{Bild}(A^{\Phi^{-1}}))$$

Die Dimension des Bildes ist gleich dem Rang einer jeden Abbildungsmatrix der linearen Abbildung. Somit folgt:

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(A^{\Phi^{-1}})) = n - \mathrm{Rg}(A)$$

Nach Vorlesung gilt für die Transponierte von A:

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^t)$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\dim_K(\mathrm{Kern}(A^{\Phi^{-1}})) &= n - \mathrm{Rg}(A) = n - \mathrm{Rg}(A^t) = n - \dim_K(\mathrm{Bild}((A^t)^{\phi^{-1}}) \\ &= \dim_K(W) - \dim_K(\mathrm{Bild}((A^t)^{\phi^{-1}})) = \dim_K(\mathrm{Kern}((A^t)^{\Phi^{-1}})))\end{aligned}$$

c) Sei y eine Lösung des HLGS $x * A = 0_{K^m}$. Nach Vorlesung ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems ein Teilraum von K^n. Wir nennen diesen Teilraum U. Aufgrund der Abgeschlossenheit folgt aus $y \in U$ sofort $y + y \in U$. Somit liegt auch $y + y$ in der Lösungsmenge und löst das HLGS.

2. Aufgabe:

Sei $\hat{B} = ((1,1,0),(1,2,0),(0,0,-2))$ eine geordnete $\mathbb{R}-$Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\hat{C} = ((1,0,0,0),(0,2,2,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,2))$ eine geordnete $\mathbb{R}-$Basis von $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten eine Abbildung $\alpha : M_{3\times 4}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ wie folgt: Es sei $\varphi_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ die Abbildung, für die gilt: $M(\varphi_A, \hat{B}, \hat{C}) = A$. Dann sei $A^\alpha = (1,1,0)^{\varphi_A}$.

a) Sei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne M^α.

Lösung: Nach Voraussetzung betrachten wir M als Abbildungsmatrix bezüglich der Basen $\hat{B}$ und $\hat{C}$. Es ist

$$\begin{aligned} M^\alpha &= (1,1,0)^{\varphi_M} = 1 \cdot (1,0,0,0) + 2 \cdot (0,2,2,0) + 3 \cdot (0,0,1,-1) - (0,0,0,2) \\ &= (1,4,7,-5) \end{aligned}$$

b) Begründe, warum es sich bei α um eine wohldefinierte Abbildung handelt und zeige, dass α ein Vektorraumhomomorphismus ist.

Lösung: Nach Satz 5.5. ist die zu A gehörende Abbildung φ_A eindeutig bestimmt. Da es sich bei φ_A um eine wohldefnierte Abbildung handelt, kann dem Vektor $(1,1,0)$ ein eindeutiges Bild unter φ_A zugeordnet werden. Insgesamt ist also die Abbildung α wohldefniert.

Seien $A, B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Dann ist nach Vorlesung

$$A + B = M(\varphi_A, \hat{B}, \hat{C}) + M(\varphi_B, \hat{B}, \hat{C}) = M(\varphi_A + \varphi_B, \hat{B}, \hat{C})$$

Somit ist

$$(A+B)^\alpha = (1,1,0)^{\varphi_A + \varphi_B} = (1,1,0)^{\varphi_A} + (1,1,0)^{\varphi_B} = A^\alpha + B^\alpha$$

Ist $\lambda \in K$, so ist nach Vorlesung

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot M(\varphi_A, \hat{B}, \hat{C}) = M(\lambda \cdot \varphi_A, \hat{B}, \hat{C})$$

Somit ist

$$(\lambda \cdot A)^\alpha = (1,1,0)^{\lambda \cdot \varphi_A} = \lambda \cdot (1,1,0)^{\varphi_A} = \lambda \cdot A^\alpha$$

c) Ist α surjektiv? Ist α injektiv? Widerlege oder beweise!

Lösung: Behauptung: α ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Beweis: Ist $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ beliebig, so ist $T := \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & -2b+c & b - \frac{c}{2} + \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein Urbild von (a,b,c,d), denn es gilt:

$$\begin{aligned} T^\alpha &= (1,1,0)^{\varphi_T} \\ &= a \cdot (1,0,0,0) + \frac{b}{2} \cdot (0,2,2,0) + (-2b+c) \cdot (0,0,1,-1) + (b - \frac{c}{2} + \frac{d}{2}) \cdot (0,0,0,2) \\ &= (a,b,c,d) \end{aligned}$$

Jedoch ist α nicht injektiv, da auch $S := \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & -2b+c & b-\frac{c}{2}+\frac{d}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein Urbild von (a,b,c,d) ist, was man schnell nachrechnen kann.

d) Wie viele Zeilen und wie viele Spalten hat eine Abbidungsmatrix zu α? Wähle geeignete Basen und berechne die Einträge der ersten Zeile der Abbildungsmatrix. Gib Eigenschaften der Abbildungsmatrix an, ohne sie konkret zu berechnen!

Lösung: Da $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ die Dimension $3 \cdot 4 = 12$ hat und $\mathbb{R}^4$ die Dimension 4 hat, hat eine Abbildungsmatrix zu α 12 Zeilen und 4 Spalten. Sei $\hat{D}$ die geordnete Standardbasis von $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, also:

$$\hat{D} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ... \right) =: (D_1, D_2, ...)$$

Dann ist

$$D_1^\alpha = (1,0,0,0), D_2^\alpha = (0,2,2,0), D_3^\alpha = (0,0,1,-1), D_4^\alpha = (0,0,0,2)$$

Für alle $i > 4$ gilt:

$$D_i^\alpha = (0,0,0,0)$$

Die erste Zeile der Abbildungsmatrix von α bezüglich der Basen $\hat{D}$ und $\hat{C}$ lautet also: $(1,0,0,0)$. Die zweite Zeile würde lauten: $(0,1,0,0)$.

Da die Abbildung α nach c) surjektiv ist, hat die Abbildungsmatrix den Rang 4. Die fünfte Zeile und alle weiteren Zeilen der Matrix sind Nullzeilen.

e) Gib ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge der Kern von α oder isomorph dazu ist.

Lösung: Der Kern von α enthält alle Matrizen aus $M - 3 \times 4(\mathbb{R})$, deren erste Zeile eine Nullzeile ist. Somit hat der Kern eine Dimension von 8 (8 Einträge der Matrizen sind noch frei wählbar).

Bezüglich der geordneten Standardbasen $\hat{D}, \hat{E}$ von $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^4$ hat α die folgende Abbildungsmatrix:

$$M(\alpha, \hat{D}, \hat{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern von α ist dann die Lösungsmenge des folgenden LGS:

$$x * M(\alpha, \hat{D}, \hat{E}) = (0,0,0,0)$$

Natürlich kann man viele andere LGS angeben, die die gleiche Lösungsmenge haben. Auch folgendes LGS hat als Lösungsmenge den Kern von α:

$$x * M(\alpha, \hat{D}, \hat{C}) = (0,0,0,0)$$

Mathenacht

1. Wahr oder falsch? Begründe / Widerlege 3 Aussagen

✗ Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

✓ Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

✓ Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist $\det(A) \neq 0$.

✗ Für $A \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$, dann sind folgende Aufgaben äquivalent: A hat vollen Rang $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = 6$

✓ Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$

---

i) $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 \neq 2 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

iv) Da A nur 4 Spalten besitzt, kann die Anzahl linear unabhängiger Spalten, also der Rang, höchstens 4 sein.

---

2. Berechne die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$, $D_n := \det(A)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $D_n = D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$

Beweis mittels vollständiger Induktion.

IA Sei $n = 1$. $\Rightarrow D_1 = \det(A) = 1$.

Sei $n = 2 \Rightarrow D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$

Sei $n = 3 \Rightarrow D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2a^2 = (1-a^2) - a^2 \cdot 1 = D_1 - a^2 D_2$

$n = 4 \rightarrow D_3 - a^2 D_2$
$= 1 - 2a^2 - a^2(1-a^2)$
$= 1 - 3a^2 + a^4$

IV Es gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS Es gilt $D_{n-1} = D_{n-2} - a^2 D_{n-3}$.

z.z.: $D_n = D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$.

$$D_n \overset{\text{Laplace nach 1.Z.}}{=} 1 \cdot \det(A^{(n-1)}) - a \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots \\ 0 & a & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}\right) \overset{\text{Laplace nach 1.Z.}}{=} \det(A^{(n-1)}) - a^2 \det(A^{(n-2)})$$

$$= D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

---

3. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?
Berechne den Rang der Matrix.

$\det(A) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$. $\Rightarrow$ invertierbar für $a \neq 1$

Rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \ \mathrm{II} + (-1)\,\mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \ \mathrm{III} + a \cdot \mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & -a^2+2a-1 \end{pmatrix} \ \mathrm{III} \cdot (-1) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & a^2-2a+1 \end{pmatrix}$$

$a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \text{falls } a \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a = 1 \end{cases}$

Inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \ \mathrm{II} + (-1)\,\mathrm{I} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \ \mathrm{III} + a \cdot \mathrm{I} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & -a^2+2a-1 \end{pmatrix} \ \mathrm{III} \cdot (-1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & a^2-2a+1 \end{pmatrix} \ \mathrm{I} + \mathrm{II} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & - & -a+2 \\ 0 & 0 & -1)^2 \end{pmatrix} \ \mathrm{I} + -\frac{2}{(a-1)^2}\,\mathrm{III} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a+2 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \ \mathrm{II} + \frac{a-2}{(a-1)^2}\,\mathrm{III} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2a}{(a-1)^2} & \frac{2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{2}{(a-1)^2} \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2a}{(a-1)^2} & \frac{2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{2}{(a-1)^2} \\ \frac{a^2-2a}{(a-1)^2}-1 & \frac{-a^2+2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{-a+2}{(a-1)^2} \\ a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{II} \cdot (-1)$
$\mathrm{III} \cdot \frac{1}{(a-1)^2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-2a}{(a-1)^2} & \frac{2a}{(a-1)^2}+1 & \frac{2}{(a-1)^2} \\ -\frac{a^2-2a}{(a-1)^2}+1 & -\frac{-a^2+2a}{(a-1)^2}-1 & -\frac{-a+2}{(a-1)^2} \\ \frac{a}{(a-1)^2} & \frac{-a}{(a-1)^2} & -\frac{1}{(a-1)^2} \end{pmatrix}$$

4. Berechne alle möglichen Produkte und Summen der Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$B+E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ $AC = \begin{pmatrix} 9 & 8 \end{pmatrix}$ $AE = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

$DC = 0$ $CD = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $DE = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ $DB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ $EA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

1 Summe 9 Produkte

5. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$. Zeige, dass $(I_3 - A)^{-1} = \frac{1}{1-2pq}\begin{pmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{pmatrix}$

Tipp: $(I_3 - A)^{-1}(I_3 - A)$ ausrechnen

Es ist $(I_3 - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 \\ -q & 1 & -p \\ 0 & -q & 1 \end{pmatrix}$.

Aus $\frac{1}{1-2pq}\begin{pmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 \\ -q & 1 & -p \\ 0 & -q & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{1-2pq}\begin{pmatrix} 1-pq-pq & -p+p^2q+p-p^2q & -p^2+p^2 \\ q-q & -pq+1-pq & -p+p \\ q^2-q^2 & -p+p & -pq+1-pq \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-2pq}\begin{pmatrix} 1-2pq & 0 & 0 \\ 0 & 1-2pq & 0 \\ 0 & 0 & 1-2pq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ folgt die Beh..